

スピン安定型非対称宇宙機の最適 2 インパルス指向制御*1

Optimal Two-impulse Reorientation of Spin-stabilized Asymmetric Spacecraft

青柳 祐基*2,*3 · 小島 広久*4
Yuki AOYAGI and Hirohisa KOJIMA

Key Words: Spacecraft, Attitude Control, Euler Angles, Rigid Body Dynamics

Abstract: In this paper, optimal attitude reorientation problems of spin-stabilized asymmetric spacecraft by impulsive thrust are studied. The spacecraft attitude is represented by two set of Euler angles to easily consider the goal attitude in the inertial frame. Two thrust impulses that are necessary to achieve the goal attitude are numerically analyzed by deriving analytical equations of the attitude expressed by elliptic integrals and Jacobi elliptic functions. Finally, Pareto optimal solutions with respect to total input and maneuver time are derived with setting the precession angle as the variable parameter.

記号の説明

- E : 運動エネルギー
- \mathbf{H} : 角運動量
- H : 角運動量の大きさ = $|\mathbf{H}|$
- \mathbf{H}_0 : 初期角運動量
- H_0 : 初期角運動量の大きさ = $|\mathbf{H}_0|$
- \mathbf{H}_f : 目標姿勢到達時の角運動量
- $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_f$: 制御入力 = $[h_{i1}, h_{i2}, h_{i3}]$
- h_0, h_f : 制御入力の大きさ = $|\mathbf{h}_i|$
- $\mathbf{h}_0^*, \mathbf{h}_f^*$: 無次元制御入力 = $[h_{i1}^*, h_{i2}^*, h_{i3}^*]$
- h_0^*, h_f^* : 無次元制御入力の大きさ = $|\mathbf{h}_i^*|$
- \mathbf{J} : 慣性モーメント = $\text{diag}(J_1, J_2, J_3)$
- ϕ, θ, ψ : 角運動量基準の Euler 角
- Θ, Ψ : 慣性座標系基準の Euler 角
- ϕ_0, θ_0, ψ_0 : 初期姿勢角
- ϕ_f, θ_f, ψ_f : 目標姿勢角
- $\boldsymbol{\omega}$: 角速度 = $[\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$
- $\boldsymbol{\omega}_0$: 初期角速度 = $[\omega_{10}, \omega_{20}, \omega_{30}]^T$

1. 序 論

スピン安定方式は宇宙機の姿勢安定方式としては最も基本的なもので、初期の人工衛星のみならず、現在でも宇宙探査機や再突入カプセル等に用いられている。さらに、受動的に姿勢を安定化できるという利点から、三軸制御方式の宇宙機であっても所定の軌道に投入されるまでの間や非

常時においては、スピン安定方式を用いる場合が多い。本研究ではこれらを総称してスピン安定型宇宙機と呼ぶ。

スピン安定型宇宙機の姿勢制御は、スピン角速度の制御とスピン軸の指向制御の 2 つに大別され、後者を Reorientation Maneuver (以下 RM) と呼ぶ。例えば静止衛星の軌道投入においてアポジキックが軌道面の変更を伴う場合には、アポジキックの前後に 100 度程度¹⁾ の RM が必要となる。RM の方法はいくつか提案されているが、代表的なものとしてラムライン法¹⁻⁴⁾、大円コース法^{1,2)}、2 インパルス法⁵⁻⁸⁾ が挙げられる。

前者 2 つの方法はガスジェットを多数回噴射することで徐々にスピン軸の方向を変更するものであり、宇宙機の質量中心を中心とする単位球面における角運動量の軌跡が、それぞれ航空機や船舶の航法における等角航路と大円航路に対応する。いずれも 1 組のガスジェットと太陽センサのみで実現でき、特にラムライン法は大円コース法や 2 インパルス法に比べ経路長が長くなるものの、ジェットを噴射するタイミングが一定と制御が容易であるため、最も実用例が多い。

2 インパルス法は 1 回目のガスジェット噴射でプリセッション運動を誘起し、スピン軸が目標姿勢に達した時点で 2 回目のガスジェットを噴射することで、プリセッション運動を止めシングルスピンの移行するというものである。このとき単位球面におけるスピン軸の軌跡は円弧状になり、円弧の中心角すなわちプリセッション角が π のものを Half-cone Slew⁶⁻⁸⁾、 π 未満も含む一般のものを Generalized Two-impulse Scheme⁵⁾ または Sector-arc Slew^{7,8)} などと称す。2 インパルス法の利点は、プリセッション角によって制御入力の総和および所要時間を広い範囲で変化させることが可能という点である。しかしながら、宇宙機が軸対称ならば要求される制御入力は解析的に求めることができる⁵⁾ もの

*1 © 2016 日本航空宇宙学会

平成 27 年 10 月 8 日、第 59 回宇宙科学技術連合講演会にて発表
平成 27 年 11 月 9 日原稿受付

*2 連絡先著者 (Corresponding author): yuki.aoyagi@ac.jaxa.jp

*3 東京大学大学院工学系研究科

*4 首都大学東京大学院航空宇宙システム工学域

の、非対称の場合は容易に求めることができず、これまでの研究は比較的厳しい拘束条件のもとでの解析^{5,6)}や、Euler 角の解の近似を用いての解析^{9,10)}に留まっている。

本研究の目的は、スピン安定型宇宙機の 2 インパルス法による指向制御を一般的に定式化し、RM に必要な制御入力 of 総和および所要時間について、最適な制御入力を得ることである。角運動量基準の Euler 角および慣性座標系基準の Euler 角に関する非線形連立方程式を導出し、プリセッション角をパラメータとしてそれらを解析的または数値的に解くことにより、制御入力および所要時間に関するパレート最適解群を導き、最適化のための指針を示す。さらに、宇宙機が非対称の場合には、適当な待機時間を設け、目標姿勢との相対的な姿勢を変化させることにより、より小さい制御入力で目標に到達できる新たなパレート最適解群が表れることを示す。

2. 運動方程式

宇宙機を剛体と仮定すると、その回転運動は Euler の運動方程式¹¹⁾に従う。一般に Euler の運動方程式は不可積分であるが、ガスジェットによる制御入力をインパルスとみなせば可積分となり、角速度および Euler 角を解析的に導くことが可能である。Dirac のデルタ関数 $\delta(t)$ を用いて制御入力を $\mathbf{h}\delta(t)$ とすれば、運動方程式は

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{h}\delta(t) \quad (1)$$

となる。初期角速度を $\boldsymbol{\omega}_{0-}$ として式 (1) を積分して整理すると、

$$\mathbf{J}\boldsymbol{\omega} - (\mathbf{J}\boldsymbol{\omega}_{0-} + \mathbf{h}) + \int_0^t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{0} \quad (2)$$

となる。式 (2) は、制御入力によって宇宙機の角運動量が瞬間的に \mathbf{h} だけ増加することを意味する。そこで制御入力を含めた初期角速度を

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_{0-} + \mathbf{J}^{-1}\mathbf{h} \quad (3)$$

と定義し直せば、ガスジェット噴射直後の運動は、外力のない自由な運動

$$\mathbf{J}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \quad (4)$$

とみなすことができる。Euler Top と呼ばれるこのような系は、Euler の運動方程式が可積分となる一例として知られており、一般解は Jacobi の楕円関数および第一種楕円積分¹²⁾を用いて記述できる。 $J_1 \leq J_2 \leq J_3$ とすると、Euler Top の解^{13,14)}は $H^2 \geq 2EJ_2$ のとき、

$$\omega_1 = s \sqrt{\frac{2EJ_3 - H^2}{J_1(J_3 - J_1)}} \operatorname{cn}(\alpha t + \beta, k), \quad (5)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{2EJ_3 - H^2}{J_2(J_3 - J_2)}} \operatorname{sn}(\alpha t + \beta, k), \quad (6)$$

$$\omega_3 = s \sqrt{\frac{H^2 - 2EJ_1}{J_3(J_3 - J_1)}} \operatorname{dn}(\alpha t + \beta, k), \quad (7)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(J_3 - J_2)(H^2 - 2EJ_1)}{J_1 J_2 J_3}}, \quad (8)$$

$$k = \sqrt{\frac{(J_2 - J_1)(2EJ_3 - H^2)}{(J_3 - J_2)(H^2 - 2EJ_1)}}. \quad (9)$$

$H^2 < 2EJ_2$ のとき、

$$\omega_1 = s \sqrt{\frac{2EJ_3 - H^2}{J_1(J_3 - J_1)}} \operatorname{dn}(\alpha t + \beta, k), \quad (10)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{H^2 - 2EJ_1}{J_2(J_2 - J_1)}} \operatorname{sn}(\alpha t + \beta, k), \quad (11)$$

$$\omega_3 = s \sqrt{\frac{H^2 - 2EJ_1}{J_3(J_3 - J_1)}} \operatorname{cn}(\alpha t + \beta, k), \quad (12)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{(J_2 - J_1)(2EJ_3 - H^2)}{J_1 J_2 J_3}}, \quad (13)$$

$$k = \sqrt{\frac{(J_3 - J_2)(H^2 - 2EJ_1)}{(J_2 - J_1)(2EJ_3 - H^2)}} \quad (14)$$

となる。ただし、

$$s = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\omega_{30}) & (H^2 \geq 2EJ_2) \\ \operatorname{sgn}(\omega_{10}) & (H^2 < 2EJ_2), \end{cases} \quad (15)$$

$$\beta = \begin{cases} \operatorname{F}(u, k) & (\omega_{10}\omega_{30} \geq 0) \\ -\operatorname{F}(u, k) + 2\operatorname{K}(k) & (\omega_{10}\omega_{30} < 0), \end{cases} \quad (16)$$

$$u = \sin^{-1}(\omega_{20}/\omega_{2m}) \quad (17)$$

であり、F および K はそれぞれ第 1 種不完全楕円積分と第 1 種完全楕円積分、sn, cn, dn は Jacobi の楕円関数である。それぞれの定義については補遺に記す。

3. 姿勢表現法

3.1 角運動量基準の Euler 角 本研究では姿勢表現法として、ガスジェット噴射後の角運動量 \mathbf{H} を基準とした Z - Y - Z 形式 Euler 角 ϕ , θ , ψ を用いる。第 1 図のように基準座標系 (x, y, z) を z 軸が \mathbf{H} に一致するように定義し、 $z \rightarrow y \rightarrow z$ の順に各軸を ψ , θ , ϕ ずつ回転させることで、機体座標系 (1, 2, 3) を表現する。このとき Euler 角と $\boldsymbol{\omega}$ の関係は、

$$\omega_1 = -\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \sin \phi, \quad (18)$$

$$\omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \quad (19)$$

$$\omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \quad (20)$$

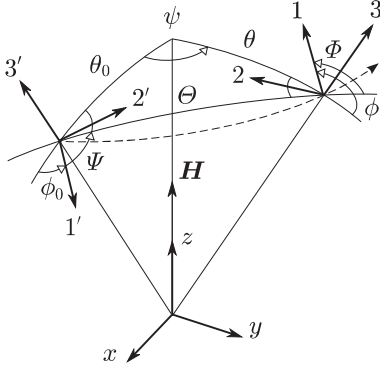
となり、機体座標系における \mathbf{H} の各成分は、

$$J_1 \omega_1 = -H \sin \theta \cos \phi, \quad (21)$$

$$J_2 \omega_2 = H \sin \theta \sin \phi, \quad (22)$$

$$J_3 \omega_3 = H \cos \theta \quad (23)$$

である。Euler の運動方程式の解を考慮し、式 (18)~(23) を Euler 角について解くと、 $J_1 = J_2$ のとき、



第1図 Euler角による姿勢表現

$$\phi = \text{atan2}(\omega_{20}, -\omega_{10}) + (1 - J_3/J_1)\omega_{30}t, \quad (24)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{J_3\omega_{30}}{H}\right), \quad (25)$$

$$\psi = \frac{H}{J_1}t \quad (26)$$

となり, $J_1 \leq J_2 \leq J_3$ のとき,

$$\phi = \text{atan2}(J_2\omega_2, -J_1\omega_1), \quad (27)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{J_3\omega_3}{H}\right), \quad (28)$$

$$\psi = \frac{H(J_3 - J_1)}{\alpha J_1 J_3} \left[\Pi[\text{am}(\alpha t + \beta, k), n, k] - \Pi[\text{am}(\beta, k), n, k] \right] + \frac{H}{J_3}t, \quad (29)$$

$$n = \begin{cases} \frac{J_3(J_2 - J_1)}{J_1(J_2 - J_3)} & (H^2 \geq 2EJ_2) \\ \frac{J_3(H^2 - 2EJ_1)}{J_1(H^2 - 2EJ_3)} & (H^2 < 2EJ_2) \end{cases} \quad (30)$$

となる. ただし, Π は第3種不完全楕円積分, am は Jacobi の振幅関数¹²⁾である. ψ_0 は一般には任意の値であるが, ここでは $\psi_0 = 0$ とした.

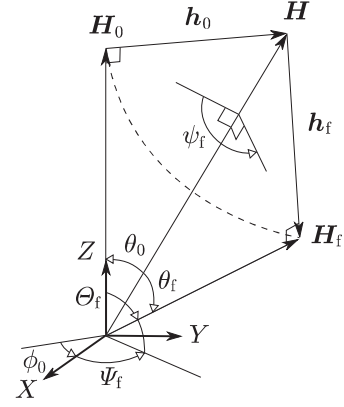
3.2 慣性座標系基準の Euler 角 1 回目のジェット噴射まで \mathbf{H} は不定であるため, 前節で述べた角運動量基準の Euler 角は目標姿勢の表現には不適當である. そこで, 慣性座標系 (X, Y, Z) を $t = 0$ における機体座標系 $(1', 2', 3')$ に一致するように定義し, 慣性座標系 (X, Y, Z) から機体座標系 $(1, 2, 3)$ への z - y - z 形式 Euler 角 Φ, Θ, Ψ を導入する. 目的はスピン軸の指向であるので, 目標スピン軸方向の俯角および方位角に対応する Θ, Ψ のみを考慮する. $\phi, \theta, \psi, \Theta, \Psi$ の関係は第1図のようになり, 球面三角法における正接定理および余弦定理を用いて,

$$\cos \Theta = \cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos \psi, \quad (31)$$

$$\cos \theta_0 \cos \psi = \cot \theta \sin \theta_0 - \cot(\pi - \phi_0 - \Psi) \sin \psi \quad (32)$$

と書ける. 式 (31), 式 (32) を解くと次のようになる.

$$\Theta = \cos^{-1}(\cos \theta_0 \cos \theta + \sin \theta_0 \sin \theta \cos \psi), \quad (33)$$



第2図 2 インパルス法による RM

$$\Psi = \pi - \phi_0 - \text{atan2}\left(\sin \psi, \frac{\sin \theta_0}{\tan \theta} - \cos \theta_0 \cos \psi\right). \quad (34)$$

4. 最適 2 インパルス指向制御

4.1 2 インパルス指向制御 本研究ではスピン安定型宇宙機の安定条件を考慮して, 慣性モーメントは $J_1 \leq J_2 \leq J_3$, RM の前後におけるスピン軸は 3 軸であるとする. また, ガスジェットは 3 軸に平行な方向に複数取り付けられており, それらの組み合わせにより 3 軸に直交する任意のトルクを発生できるものとする. 以上を踏まえ, 本研究で想定する 2 インパルス法による RM の手順は第2図および以下に示す通りである.

- (i) 宇宙機は初期角運動量 \mathbf{H}_0 を持ち, 3 軸周りのシングルスピン状態にある.
- (ii) 適当なタイミングでガスジェット \mathbf{h}_0 を噴射することによって横方向の角速度が誘起され, 全運動量 \mathbf{H} の周囲をスピン軸が周回するプリセッション運動を開始する.
- (iii) 3 軸が目標姿勢 Θ_f, Ψ_f に達した時点で横方向の角速度を打ち消すように 2 回目のガスジェット \mathbf{h}_f を噴射し, 再び 3 軸周りのシングルスピン状態に移す.

第2図のプリセッション角 ψ_f に着目すると, 目標姿勢が同一であっても, ψ_f によってスピン軸の軌跡および $\mathbf{h}_0, \mathbf{h}_f, \mathbf{H}$ が変化することが分かる. すなわち, ψ_f に対するスピン軸の軌跡および必要な制御入力を解き, 最適な ψ_f を選ぶことで, RM に必要な制御入力 of 総和および所要時間について最適化可能である.

4.2 解析 目標姿勢に到達する時刻, すなわち RM の所要時間を t_m とすれば, 解くべき問題は次のように書ける.

$$\begin{cases} \Theta(\mathbf{h}_0, t_m) - \Theta_f = 0, \\ \Psi(\mathbf{h}_0, t_m) - \Psi_f = 0, \\ \psi(\mathbf{h}_0, t_m) - \psi_f = 0. \end{cases} \quad (35)$$

本研究ではガスジェットは 3 軸に直交する任意のトルクを発生できるものと仮定しているため, $h_{03} = 0$ なる拘束条件が課されている. また, 同様の仮定から, 2 回目のガスジェット噴射 \mathbf{h}_f は問題に対して何ら拘束条件を課すもの

ではなく、単に横方向角速度を打ち消すようなトルクを発生すればよい。すなわち、 \mathbf{h}_f は式 (35) の解と Euler の運動方程式の解を用いて次のように表せる。

$$\mathbf{h}_f = - \begin{bmatrix} J_1 \omega_1(t_m) \\ J_2 \omega_2(t_m) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

宇宙機の質量分布がスピン軸に関して軸対称、すなわち $J_1 = J_2$ の場合は Euler 角の線形性により、式 (35) を解析的に解くことが可能である。しかしながら、宇宙機が非対称の場合には解析的に解くことが困難であるため、本研究では信頼領域法の一つである信頼領域 dog-leg 法¹⁵⁾ を用いて数値的に解を求めた。

4.3 最適化法 最適化する設計変数として制御入力 h_m の絶対値の総和 $h_m = h_0 + h_f$ および所要時間 t_m を選び、慣性モーメント \mathbf{J} と共にそれぞれ次のように無次元化する。なお、 \mathbf{h}_0 、 \mathbf{h}_f とその各成分および h_0 、 h_f についても無次元化したものを h_i^* または t_i^* と表記する。

$$h^* = h_m/H_0, \quad (37)$$

$$t^* = t_m \omega_{30}, \quad (38)$$

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}/J_3 = \text{diag}(J_1^*, J_2^*, J_3^*). \quad (39)$$

ここで、設計変数 h^* 、 t^* および重み w_h 、 w_t を用いて評価関数 f を次のように定義し、 f を最小化するような問題を考える。

$$f = w_h h^* + w_t t^*. \quad (40)$$

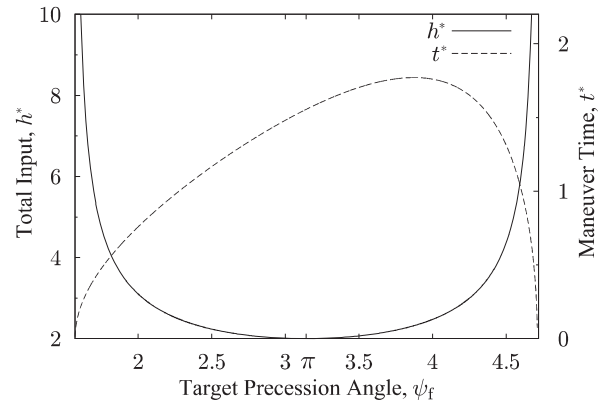
与えられた \mathbf{J}^* 、 Θ_f 、 Ψ_f 、 w_h 、 w_t に対して ψ_f を変化させながら式 (35) および式 (36) を解くことで、 f を最小にするような ψ_f および制御入力を求めることができる。このような最適化問題に対しては、ニュートン法や最急降下法などのさまざまな手法が提案されているが、本研究では後述する待機時間付き最適 2 インパルス制御のために、 $0 < \psi_f \leq 2\pi$ のすべての ψ_f に対して h^* 、 t^* を求めた後に、 f を最小にする ψ_f を選ぶこととする。

仮定より $J_3^* \equiv 1$ であり、 J_1^* および J_2^* の値がとりうる範囲は、 $0 \leq J_1^* \leq 1$ 、 $J_1^* \leq J_2^* \leq 1$ である。さらに、 Θ_f は $0 < \Theta_f \leq \pi$ とするが、 Ψ_f については宇宙機の質量分布がスピン軸に関して 2 回対称であるため、 $0 \leq \Psi_f < \pi$ の範囲のみを考慮する。

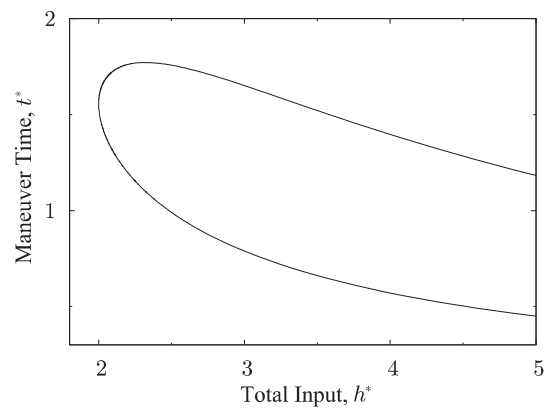
4.4 数値計算例

4.4.1 軸対称 はじめに宇宙機が軸対称の場合を例に、 ψ_f に対する h^* 、 t^* の傾向を示す。軸対称の場合、Euler 角の線形性により式 (35) は解析的に解くことができ、 h^* 、 t^* を \mathbf{J}^* 、 Θ_f 、 ψ_f の関数として導くことが可能である。さらに、対称性により Ψ_f および ψ_f にかかわらず $h_0 = h_f$ であり、 Ψ_f は単に \mathbf{h}_0 および \mathbf{h}_f の成分を規定するに過ぎない。

$J_1^* = J_2^* = 0.7$ 、 $\Theta_f = \pi/2$ の場合の ψ_f に対する h^* 、 t^* の関係を第 3 図に示す。第 2 図の幾何学的関係により、 $0 < \psi_f \leq 2\pi$ で解が存在する範囲は $\Theta_f < \psi_f < 2\pi - \Theta_f$ で



第3図 ψ_f vs. h^* 、 t^* ($J_1^* = J_2^* = 0.7$)



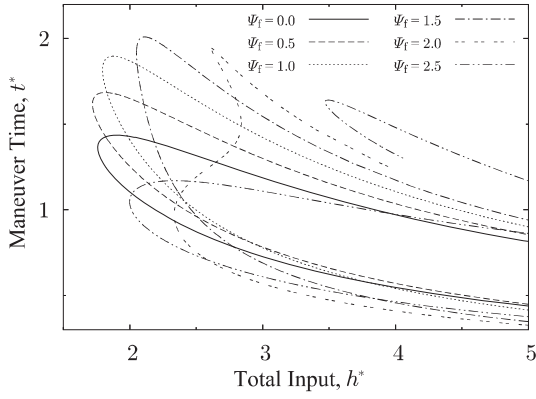
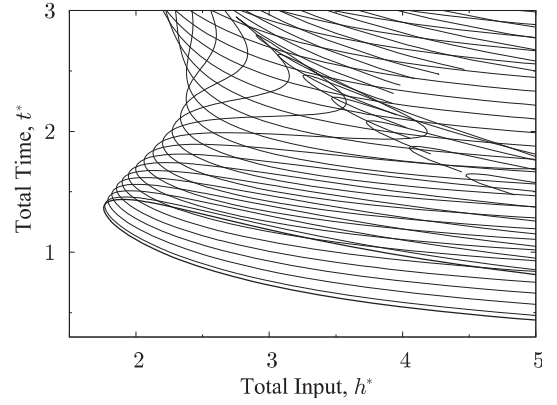
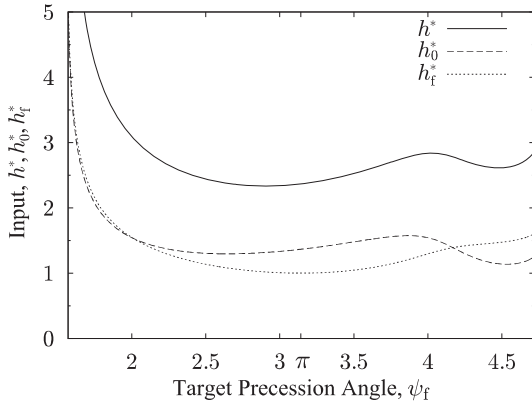
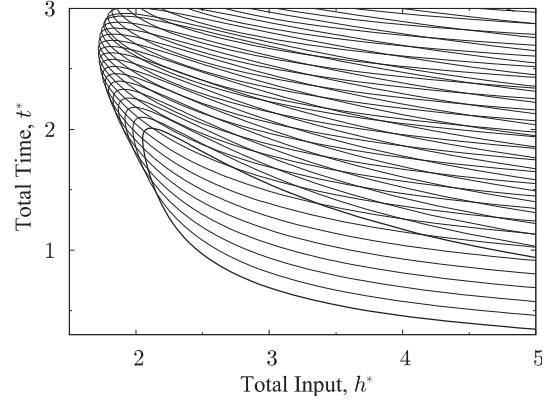
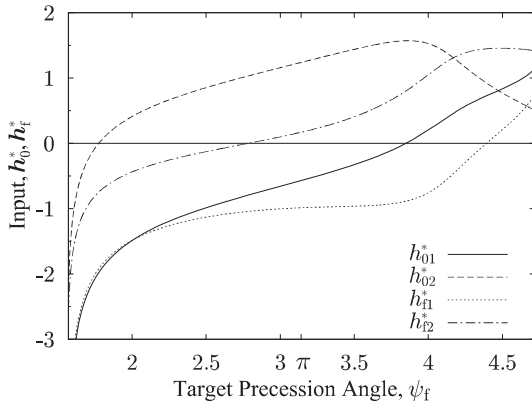
第4図 h^* vs. t^* ($J_1^* = J_2^* = 0.7$)

あり、その両側で $h^* \rightarrow \infty$ 、 $t^* \rightarrow 0$ となる。 h^* は $\psi_f = \pi$ で最小となり、 t^* は $\psi_f \simeq 4$ で最大となるため、 h^* 、 t^* の関係は第 4 図のようになる。

以上により、 $\Theta_f < \psi_f \leq \pi$ で h^* 、 t^* は Trade-off の関係にあり、 ψ_f はパレート最適であることが分かる。したがって、 f を最小にする ψ_f は、 h^* - t^* 平面上における ψ_f の解群と直線 f の接点として与えられる。

4.4.2 非対称 宇宙機が非対称の場合、一般に $h_0 \neq h_f$ であり、その傾向はジェット噴射の方向を規定する Ψ_f および ψ_f によって変化する。

例として、 $J_1^* = 0.5$ 、 $J_2^* = 0.7$ 、 $\Theta_f = \pi/2$ の場合の h^* 、 t^* の関係を第 5 図に、 $\Psi_f = 2.0$ の場合の制御入力の内訳を第 6 図および第 7 図に示す。第 5 図より、 Ψ_f が最小慣性主軸 (1 軸) 方向に近い $\Psi_f \simeq 0$ の場合には h^* が小さく、 Ψ_f が中間主軸慣性主軸 (2 軸) 方向に近い $\Psi_f \simeq \pi$ の場合には h^* が大きくなる傾向にあることが分かる。これは 2 軸方向に向けてプリセッション運動を誘起する場合、1 回目のジェット噴射において大きな制御入力を要するからである。また、 $\Psi_f = 2.0$ および $\Psi_f = 2.5$ の場合には凹な解が表れている。このとき制御入力の内訳をみると、 $h_{01}^* = 0$ のとき h_{02}^* および h_0^* が極大となり、 h^* もその近傍で極大値をとっている。すなわち、 Ψ_f が 2 軸方向に近い場合は、1 回目のジェット噴射における制御入力がすべて 2 軸方向に加わるとき著しく効率が下がり、解が凹になる。なお、 Ψ_f が 1


 第5図 h^* vs. t^* ($J_1^* = 0.5, J_2^* = 0.7$)

 第8図 h^* vs. t^* ($J_1^* = 0.5, J_2^* = 0.7, \Psi_f(0) = 0$)

 第6図 ψ_f vs. h^*, h_0^*, h_f^* ($J_1^* = 0.5, J_2^* = 0.7, \Psi_f = 2.0$)

 第9図 h^* vs. t^* ($J_1^* = 0.5, J_2^* = 0.7, \Psi_f(0) = 1.5$)

 第7図 ψ_f vs. h_0^*, h_f^* ($J_1^* = 0.5, J_2^* = 0.7, \Psi_f = 2.0$)

軸方向に近く、 h_{01}^* が 0 を横切らない場合は解は凸となる。

5. 待機時間付き最適 2 インパルス指向制御

前述のように、非対称の場合は Ψ_f によって h^*, t^* の傾向が変化する。 Ψ_f は初期姿勢 (RM を開始する時刻の姿勢) からみた目標スピン軸方向の方位角であるので、 $t = 0$ で RM を開始せずに待機すれば宇宙機はシングルスピンを続け、 Ψ_f は時々刻々変化する。したがって、待機時間も含めた最適化問題を解くことで、より最適性の高い RM を行うことが可能である。

待機時間を t_w とすると、 $t = t_w$ における目標方位角 $\Psi_f(t_w)$ および全所要時間 t_t は次のように書ける。

$$\Psi_f(t_w) = \Psi_f(0) - t_w \omega_{30}, \quad (41)$$

$$t_t = t_m + t_w. \quad (42)$$

さらに、式 (35)、式 (38) が次のように書き換えられる。

$$\begin{cases} \Theta(\mathbf{h}_0, t_m) - \Theta_f(0) = 0, \\ \Psi(\mathbf{h}_0, t_m) - \Psi_f(0) = -t_w \omega_{30}, \\ \psi(\mathbf{h}_0, t_m) - \psi_f(0) = 0. \end{cases} \quad (43)$$

$$t^* = t_t \omega_{30}. \quad (44)$$

式 (43) は 4 変数に対して式が 3 本なので、式 (35) と同様の方法では解くことができない。そこで本研究では、 t_w を動かしながら式 (43) を解くことで、最適化計算を行った。

5.1 数値計算例 $J_1^* = 0.5, J_2^* = 0.7, \Theta_f = \pi/2, \Psi_f(0) = 0$ の場合を第 8 図に、 $\Psi_f(0) = 1.5$ の場合を第 9 図に示す。図中の太い実線は $t_w = 0$ 、すなわち待機時間無しの場合の h^*, t^* の関係を、細い実線は t_w を 0.1 ずつ増やしたときの h^*, t^* の関係を表している。 $\Psi_f(0) = 0$ の場合は待機時間を設けても最適性は変わらないが、 Ψ_f が 2 軸方向に近い $\Psi_f(0) = 1.5$ の場合には待機時間を設けることにより、より小さい制御入力で目標に到達できる新たなパレート最適解群が表れる。なお、所要時間に関しては待機時間を設けることによる改善はみられなかった。

6. 結 論 補 遺

スピン安定型宇宙機の 2 インパルス指向制御について、角運動量基準の Euler 角および慣性座標系基準の Euler 角に関する非線形連立方程式を導出し、プリセッション角をパラメータとしてそれらを解析的または数値的に解くことにより、制御入力および所要時間に関するパレート最適解群を導き、最適化のための指針を示した。さらに、宇宙機が非対称の場合には、適当な待機時間を設け、目標姿勢との相対的な姿勢を変化させることにより、より小さい制御入力で目標に到達できる新たなパレート最適解群が表れることを示した。なお、本研究では \mathbf{J}^* および Θ_f の影響に関する考察、On-board で最適化計算を行うための具体的な方策および待機時間を設けることによって所要時間が改善する場合が存在するか否かを示すことができなかつたが、これらの点は今後の課題である。

参 考 文 献

- 1) 村上 力, 狼 嘉彰, 中島 厚: 対称スピン衛星の軸方向ジェットによるスピン軸方向制御と制御中におけるスピン軸の挙動について, 航空宇宙技術研究所報告 TR-380, 1974.
- 2) 中谷一郎, 泉沢友幸: スピンシミュレータによる人工衛星の姿勢決定・制御実験, 計測自動制御学会論文集, **13** (1977), pp. 615-621.
- 3) 岩永征之, 生田宏二郎, 鶴本良夫, 佐野良雄, 村上 力, 安齊孝男, 田中俊輔: スピン衛星の姿勢シミュレーション, 日本航空宇宙学会誌, **23** (1975), pp. 61-71.
- 4) Greene, R. H.: Early Bird Placement in a Stationary Orbit: Launch and Control System Maneuvers, AIAA Paper 66-262, 1966.
- 5) Grubin, C.: Generalized Two-impulse Scheme for Reorienting a Spin Stabilized Vehicle, Guidance and Control, Academic Press, New York, 1962, pp. 649-668.
- 6) Grubin, C.: Two-Impulse Attitude Reorientation of an Asymmetric Spinning Vehicle, J. Spacecraft Rockets, **4** (1967), pp. 306-310.
- 7) Raus, R., Gao, Y. and Watt, M.: Review and Analysis of Single-Thruster Attitude Control Algorithms for Spinning Spacecraft, 61st International Astronautical Congress, Prague, Czech, 2010.
- 8) Raus, R., Gao, Y., Wu, Y. and Watt, M.: Analysis of State-of-the-art Single-thruster Attitude Control Techniques for Spinning Penetrator, Acta Astronautica, **76** (2012), pp. 60-78.
- 9) Martz, C. W.: Attitude Reorientation of Spacecraft by Means of Impulse Coning, NASA Technical Note, NASA TN D-8452, 1977.
- 10) Martz, C. W.: Two-impulse Reorientation of Asymmetric Spacecraft, NASA Technical Paper, NASA TP 1554, 1979.
- 11) Whittaker, E. T.: A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th ed., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1947.
- 12) Byrd, P. F. and Friedman, M. D.: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists Second Edition, Springer, Berlin, 1971.
- 13) Hughes, P. C.: Spacecraft Attitude Dynamics, John Wiley & Sons, New York, 1986, pp. 104-108.
- 14) Kane, T. R., Likins, P. W. and Levinson, D. A.: Spacecraft Dynamics, McGraw-Hill Book Company, New York, 1983, pp. 187-199.
- 15) Levenberg, K.: A Method for the Solution of Certain Problems in Least Squares, Q. Appl. Math., **2** (1944), pp. 164-168.

楕円積分と楕円関数 第 1 種不完全楕円積分 $F(\varphi, k)$, 第 3 種不完全楕円積分 $\Pi(\varphi, n, k)$ および第 1 種完全楕円積分 $K(k)$, ならびに Jacobi の振幅関数 $\text{am}(u, k)$ および Jacobi の楕円関数 $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$, $\text{dn}(u, k)$ はそれぞれ次のように定義される¹²⁾.

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (45)$$

$$\Pi(\varphi, n, k) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1-n \sin^2 \theta) \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}}, \quad (46)$$

$$K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right), \quad (47)$$

$$\text{am}(u, k) = \varphi, \quad (48)$$

$$\text{sn}(u, k) = \sin \varphi, \quad (49)$$

$$\text{cn}(u, k) = \cos \varphi, \quad (50)$$

$$\text{dn}(u, k) = \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}. \quad (51)$$

角運動量基準の Euler 角の解の導出 ϕ および θ については式 (21)~(23) に式 (5)~(14) を直接代入すればよい。 ψ については式 (18), (19) および式 (21), (22) より,

$$\dot{\psi} = H \frac{J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2}{J_1^2 \omega_1^2 + J_2^2 \omega_2^2} \quad (52)$$

となる。これに Euler の運動方程式の解を代入すると,

$$\dot{\psi} = \frac{H}{J_1 J_3} \left[\frac{J_3 - n J_1 \text{sn}^2(\alpha t + \beta, k)}{1 - n \text{sn}^2(\alpha t + \beta, k)} \right] \quad (53)$$

となる。ここで, $\gamma = \alpha t + \beta$ とおくと,

$$\frac{d\psi}{d\gamma} = \frac{H}{\alpha J_1} \frac{1}{1 - n \text{sn}^2 \gamma} - \frac{H}{\alpha J_3} \frac{n \text{sn}^2 \gamma}{1 - n \text{sn}^2 \gamma} \quad (54)$$

となり, さらに第 3 種楕円積分に関する公式¹²⁾

$$\int_0^u \frac{dv}{1 - n \text{sn}^2 v} = \Pi(\text{am } u, n, k), \quad (55)$$

$$\int_0^u \frac{n \text{sn}^2 v dv}{1 - n \text{sn}^2 v} = \Pi(\text{am } u, n, k) - F(\text{am } u, k) \quad (56)$$

を用いると,

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{H}{\alpha J_1} \int_\beta^{\alpha t + \beta} \frac{d\gamma}{1 - n \text{sn}^2 \gamma} - \frac{H}{\alpha J_3} \int_\beta^{\alpha t + \beta} \frac{n \text{sn}^2 \gamma d\gamma}{1 - n \text{sn}^2 \gamma} \\ &= \frac{H}{\alpha J_1} \left[\Pi(\text{am } \nu, n, k) \right]_\beta^{\alpha t + \beta} \\ &\quad - \frac{H}{\alpha J_3} \left[\Pi(\text{am } \gamma, n, k) - F(\text{am } \gamma, k) \right]_\beta^{\alpha t + \beta} \\ &= \frac{H(J_3 - J_1)}{\alpha J_1 J_3} \left[\Pi[\text{am}(\alpha t + \beta, k), n, k] \right. \\ &\quad \left. - \Pi[\text{am}(\beta, k), n, k] \right] + \frac{H}{J_3} t, \end{aligned} \quad (57)$$

が得られる。